UNA DISUGUAGLIANZA PER CORPI CONVESSI IN $\Re^4$

Giorgio Pederzoli

Introduzione

«The geometry of more than three dimensions is entirely a modern branch of mathemathics, going no farther back than the first part of the nineteenth century». Così esordisce Manning (1914) che continua «there is now a considerable popular interest in the four-dimensional geometry, because of the many curious things about it, and because of attempts which have been made to explain certain mysterious phenomena by means of it. This interest has produced numerous articles and books written to describe the fourth dimension in a non-mathematical way. In 1908 a price of $ 500 was offered through the *Scientific American* for the best non-mathematical essay on the fourth dimension. Two hundred and forty-five essays were submitted in this competition».

Alcuni di questi saggi sono stati raccolti in un volume da Manning (1910) la cui introduzione fornisce una descrizione molto dettagliata delle varie tematiche affrontate. Altri lavori che riguardano la geometria delle quattro dimensioni sono i libri di Jouffret (1903) e di Hinton (1904). Tra i tanti argomenti trattati, ricordiamo quelli sulla classificazione dei politopi regolari e quelli sulla misura dei relativi ipervolumi.

In questo lavoro si considera il valore medio della caratteristica di Eulero relativa all'intersezione di due ipersuperfici convesse nello spazio euclideo di dimensione quattro.

1. Corpi convessi in $\Re^4$

Sia K un corpo convesso (insieme convesso e compatto) nello spazio euclideo di dimensione $d = 4$, ed indichiamo con Q_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, i relativi *Quermassintegralen* (*mean cross-sectional measures*) detti anche funzionali di Minkowski (si veda ad esempio Bonnesen-Fenchel, 1934). Si tratta di misure invarianti rispetto alle isometrie, definiti in generale dalla formula

$$Q_i^{(d)} = \frac{w_d}{w_{d-1}} \int_{L_i} m_{d-i}\left(p_s \perp K\right) U_i\left(dS\right)$$

dove $w_d = \frac{p^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}$ è il volume della palla unitaria in R^d,

m_i è la misura i-dimensionale di Lebesgue,

L_i è l'insieme degli i-sottospazi,

$p_S \perp K$ è la proiezione ortogonale di K sullo spazio $(d - i)$-dimensionale ortogonale a $S_i \in L_i$,

U_i è la distribuzione di probabilità uniforme su L_i,

dS è l'elemento di superficie.

I funzionali di Minkowski sono legati ai cosiddetti *volumi intrinseci* dalla formula di Steiner

$$V_i = \frac{\binom{d}{i}}{w_{d-i}} Q_{d-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, d .$$

Alcuni di questi funzionali posseggono una interpretazione geometrica per via delle loro proprietà invarianti. In particolare la quantità Q_0 è uguale al volume V_d, dQ_1 è la misura $(d - 1)$-dimensionale dell'area della frontiera ∂K, Q_d è costante ed uguale a w_d, $2/w_d\ Q_{d\text{-}1}$ è un altro funzionale detto spessore medio. Per alcuni corpi convessi quando $d = 1, 2, 3$ formule esplicite dei relativi *Quermassintegralen* si trovano in Hadwiger (1955), Hadwiger (1957) e in Santalò (1976).

Quando, ed è il caso che ci interessa, $d = 4$ per un generico corpo convesso in $\mathfrak{R}^4$ abbiamo che Q_0 = volume di K; $4Q_1$ = superficie di ∂K, $Q_4 = \pi^2/2$ e, qualora K abbia una frontiera sufficientemente liscia,

$$4Q_2 = M_1 = \frac{1}{3} \int_{\partial K} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) dS$$

$$4Q_3 = M_2 = \frac{1}{3} \int_{\partial K} \left(\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} \right) dS$$

detti rispettivamente primo e secondo integrale di curvatura media. Ricordiamo infine per qualsiasi K

$$\frac{1}{w_d} Q_d = V_0 = 1$$

è la caratteristica di Eulero.

Esempio 1. Se K = segmento di lunghezza l, allora

$Q_0 = Q_1 = Q_2 = 0$, $Q_3 = p/3\ l$, $Q_4 = p^2/2$

e

$M_0 = M_1 = 0$, $M_2 = 4/3\ p\ l$, $M_3 = 2p^2$.

Esempio 2. Se K = parallelotopo con lati a_1, a_2, a_3, a_4, allora

$Q_0 = a_1 a_2 a_3 a_4$,

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4\right),$$

$$Q_2 = \frac{p}{6}\left(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4\right),$$

$$Q_3 = \frac{p}{3}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right),\ Q_4 = \frac{p^2}{2}.$$

Ne segue che

$$M_0 = 2\left(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4\right),$$

$$M_1 = \frac{2p}{3}\left(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4\right),$$

$$M_2 = \frac{4p}{3}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right),\ M_3 = 2p^2.$$

Esempio 3. Nel caso particolare dove $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$, K è l'ipercubo di lato a e quindi

$Q_0 = a^4$, $Q_1 = 2a^3$, $Q_2 = pa^2$, $Q_3 = 4p/3\ a$, $Q_4 = p^2/2$

da cui segue che

$M_0 = 8a^3$, $M_1 = 4pa^2$, $M_2 = 16/3\ pa$, $M_3 = 2p^2$.

Esempio 4. Quando K è l'ipersfera solida di raggio r si ottiene

$Q_0 = p^2/2\ r^4$, $Q_1 = p^2/2\ r^3$, $Q_2 = p^2/2\ r^2$, $Q_3 = p^2/2\ r$, $Q_4 = p^2/2$

e pertanto $M_0 = 2p^2r^3$, $M_1 = 2p^2r^2$, $M_2 = 2p^2r$, $M_3 = 2p^2$.

Esempio 5. Se K = ipercilindro con raggio r ed altezza k, allora

$Q_0 = 4p/3\ r^4h$, $Q_1 = 2p/3\ r^3 + pr^2h$, $Q_2 = p^2/3\ r^3 + 2p/3\ rh$, $Q_3 = 4p/3\ r + p/3\ h$,

$Q_4 = p^2/2$

da cui si ottiene

$M_0 = 8p/3\ r^3 + 4pr^2h$, $M_1 = 4p^2/3\ r^2 + 8p/3\ rh$, $M_2 = 16p/3\ r + 4p/3\ h$, $M_3 = 2p^2$.

Esempio 6. Sia *K* l'ellissoide con semiassi *a, a, a,* $l a$ dove *a* è il raggio dell'equatore e $0 < l < 1$.

Dalla formula generale, Hadwiger (1957)

$$Q_i = k_d\, l^{i+1} a^{d-i} F\left(\frac{d+1}{2}; \frac{i}{2}; \frac{d}{2}; 1 - l^2\right)$$

dove *F* è la funzione ipergeometrica, $d \geq 1$, $0 \leq i \leq d$, si ricava

$$Q_0 = \frac{p^2}{2} l a^2, \quad Q_1 = \frac{p^2}{2} l^2 a^3 F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}; 2; 1 - l^2\right)$$

$$Q_2 = \frac{p^2}{2} l^3 a^2 F\left(\frac{5}{2}, 1; 2; 1 - l^2\right)$$

$$Q_3 = \frac{p^2}{2} l^4 a F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}; 2; 1 - l^2\right)$$

$$Q_4 = \frac{p^2}{2} l^5 F\left(\frac{5}{2}, 2; 2; 1 - l^2\right) = \frac{p^2}{2}$$

da cui risulta

$$M_0 = 2p^2 l^2 a^3 F_{\frac{1}{2}} \qquad M_1 = 2p^2 l^3 a^2 F_1$$

$$M_2 = 2p^2 l^4 a F_{\frac{3}{2}} \qquad M_3 = 2p^2 l^5 F_2$$

dove F1/2, F1, F3/2, F2 sono le funzioni ipergeometriche di cui sopra.

2. Le Funzioni Ipergeometriche $F_{1/2}$, F_1, $F_{3/2}$, F_2

Si considerino le funzioni ipergeometriche

$$F_{\frac{1}{2}} = F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}; 2; 1 - l^2\right), \qquad F_1 = F\left(\frac{5}{2}, 1; 2; 1 - l^2\right)$$

$$F_{\frac{3}{2}} = F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}; 2; 1 - l^2\right), \qquad F_2 = F\left(\frac{5}{2}, 2; 2; 1 - l^2\right).$$

Da Abromowitz e Stegun (1964) sappiamo che $F(a, b; b; z) = (1 - z)^{-a}$, e quindi $F_2 = l^{-5}$. Inoltre, si veda Gasper e Rahaman (1990), essendo $F(a, b; c; z)$ definita quando $z = 1$ soltanto se $Re(c - a - b) > 0$, ciascuno dei simboli $F_{1/2}$, F_1, $F_{3/2}$, non è definito per $l = 0$ in quanto $Re(c - a - b) = -1; -3/2; -2$ rispettivamente. Infine, da Gradshteyn e Ryzhik (1980), si ha che

$$F_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3p l^2}\left[K\left(\sqrt{1 - l^2}\right) + \left(2 l^2 - 1\right) D\left(\sqrt{1 - l^2}\right)\right]$$

$$F_1 = \frac{2}{3\left(1-l^2\right)}\left(\frac{1}{l^3}-1\right)$$

$$F_{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3p\,l^4}\left[2K\left(\sqrt{1-l^2}\right)-\left(2-l^2\right)D\left(\sqrt{1-l^2}\right)\right]$$

dove $K(k)$ e $D(k)$ sono gli integrali ellittici definiti come segue:

$$K(k) := \int_0^{p/2}\frac{dq}{\sqrt{1-k^2 sin^2 q}} = \frac{p}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)$$

$$D(k) := \int_0^{p/2}\frac{\sin^2 q\ dq}{\sqrt{1-k^2\sin^2 q}} = \frac{p}{4}F\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};2;k^2\right)$$

K(k) è detto integrale ellittico completo del primo tipo, mentre quello di secondo tipo è definito da

$$E(k) := \int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 q}\ dq = \frac{p}{2}F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;k^2\right)$$

dove, per tutti, vale la condizione 0 < k < 1. In particolare, quando k < 1,

$$K = \frac{p}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{9k^2}{64}+\ldots\right) \quad \text{e} \qquad E = \frac{p}{2}\left(1-\frac{k^2}{4}-\frac{3k^2}{64}-\ldots\right).$$

Ricordiamo infine che se k2 + k’2 = 1 allora anche K(k’) = K’(k) e E(k’) = E’(k) sono integrali ellittici che soddisfano la relazione di Legendre

$$K(k)E'(k)+K'(k)E(k)-K(k)K'(k)=\frac{p}{2}.$$

3. La congettura di Santalò

La congettura formulata da Santalò (1970) equivale ad affermare che

$$\Delta = 8p^2 Q_0 + 3M_1^2 - 4M_0 M_2$$

è sempre non negativo per qualsiasi corpo convesso K in $\Re^4$. È facile verificare che la congettura è vera quando K è il parallelotopo rettangolare con lati a1, a2, a3, a4, e quindi, a fortiori, anche per l’ipercubo di lato a. Nel caso in cui K è l’ipersfera solida di raggio r si ottiene

$$\Delta = 8p^2\left(\frac{p^2}{2}r^4\right)+3\left(2p^2r^2\right)-4\left(2p^2r^3\right)\left(2p^2r\right)=0.$$

Tuttavia, quando *K* è un ipercilindro di raggio *r* con altezza *h*, Hadwiger aveva (in una comunicazione privata all'autore) segnalato che $\Delta < 0$ in quanto se $r = 1$, $h = 1$, si ottiene

$$\frac{1600p^2}{9} > \frac{32p^3}{3} + 3\left[\frac{4}{3}p(p+2)\right]^2 .$$

Un secondo controesempio è fornito dalla sfera solida tridimensionale (con r = 1) quando la si considera un corpo convesso in $\Re^4$ con Q0 = 0, M0 = 8π/3, M1 = 4π2/3, M2 = 16π/3 per la quale si ottiene

$$\Delta = \frac{16}{3}p^4 - \frac{512}{9}p^2 < 0 .$$

Quando K è l'ellissoide in $\Re^4$ si ottiene

$$\Delta = 8p^2\left(\frac{p^2}{2}la^4\right) + 3\left(4p^4 l^6 a^4 F_1^2\right) - 4\left(2p^2 l^2 a^3 F_{\frac{1}{2}}\right)\left(2p^2 l^4 a F_{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= 4p^4 la^4 + 12p^4 l^6 a^4 F_1^2 - 16p^4 l^6 a^4 F_{\frac{1}{2}} F_{\frac{3}{2}} = 1 + l^5\left(3F_1^2 - 4F_{\frac{1}{2}} F_{\frac{3}{2}}\right)$$

Prendendo λ = ½ si trova Δ = – 0.04, mentre per λ = 1/10 risulta Δ = – 0.4974, e pertanto la congettura non è vera nel caso dell'ellissoide per qualsiasi valore di 0 < λ < 1. Si noti che per λ = 1 l'ellissoide si riduce alla sfera e quindi, essendo F1/2 = F1 = F3/2 = 1 si ottiene ancora Δ = 0.

Bibliografia

Abramowitz, M. e Stegun, I. A.: 1964, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington.

Betke, U. e Henk, M.: 1993, “Intrinsic volumes and lattice points of crosspolytopes”, *Monatshefte für Mathematik*, 115, pp. 27-33.

Bonnesen, T. e Fenchel, W.: 1934, *Theorie der Konvexen Körper*, Ergeb. Math., Springer, Berlin.

Gasper, G. e Rahman, M.: 1990, *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, New York.

Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M.: 1980, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York.

Hadwiger, H.: 1955, *Altes und Neues über Konvexe Körper*, Birkhauser, Basel und Stuttgart.

Hadwiger, H.: 1957, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin.

Hinton, C. H.: 1904, *Fourth Dimension*, Macmillan, London.

Jouffret, E.-P.: 1903, *Géométrie à quatre dimensions*, Gauthier-Villars, Paris.

Manning, H. P.: 1910, *The Fourth Dimension Simply Explained*, Munn and Company, New York.

Manning, H. P.: 1914, *Geometry of Four Dimensions*, The Macmillan Company, New York.

Santalò, L. A.: 1970, “Mean values and curvatures”, *Izv. Akad. Nauk Armjan. S.S.S.R., Ser. Mat.* 5, pp. 286-295.

Santalò, L. A.: 1976, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Srivastara, H. M.: 1995, Comunicazione privata.