PREDIZIONE DELLE MAREE NELLA LAGUNA DI VENEZIA USANDO LA TEORIA DEI SISTEMI NON-LINEARI

José-Manuel Zaldívar, Fernanda Strozzi*

**European Commission, Joint Research Center, Institute for Systems, Informatics and Safety, Ispra (VA), Italy*

1. Introduzione

Le alte maree, sono dovute ad una combinazione di fattori climatici caotici e di dinamiche periodiche associate a particolari aree. La predizione di tali eventi è stata sempre oggetto d'interesse non solo da un punto di vista umano ma anche economico. Il più famoso allagamento della laguna di Venezia è quello del novembre 1966 quando a causa dei forti venti, l'acqua della laguna crebbe di circa due metri rispetto al normale livello. Il danno alle case della città, chiese e musei fu circa di cento milioni di ECU. Il complesso comportamento delle maree non è stato ancora compreso totalmente. La predizione esatta della risposta degli oceani all'azione congiunta degli agenti atmosferici ed astronomici fino ad ora non è stata possibile. Mentre la risposta agli agenti astronomici è un fenomeno periodico e predicibile causato dal moto relativo di terra, luna e sole, la risposta agli eventi atmosferici è un fenomeno complesso trattato generalmente come stocastico. Tale problema è stato affrontato sia usando modelli numerici che metodi statistici. Il primo approccio consiste nel risolvere le equazioni idrodinamiche usando le tecniche delle differenze finite per ottenere le variazioni nel livello del mare indotte dalle maree e dal vento ed il campo di pressione atmosferica agente sull'acqua del mare. Sono stati sviluppati modelli numerici con una e due dimensioni per prevedere il fenomeno delle maree a Venezia, (Tomasin, 1973). Tuttavia tali modelli richiedono il calcolo della forza in ogni punto della griglia di differenze finite e quindi il loro uso per la predizione delle maree è numericamente troppo dispendioso. I modelli stocastici lineari invece, sono adatti per predizioni in tempo reale poiché sono semplici ed il loro costo computazionale non troppo elevato. Vi sono modelli ARMA (autoregressive-moving average) che usano i dati della

pressione e del livello del mare a Venezia o dati del livello del mare Adriatico in diversi punti, per prevedere il livello dell'acqua nella laguna di Venezia, vedi Michelato *et al*. (1983), Moretti e Tomasin (1984). Con tali metodi è possibile ottenere errori standard tra le predizioni ed i livelli misurati dell'ordine di 6-7 cm per 3-4 ore di predizione e 8-11 cm nel caso di 12-24 ore. Questi sono i metodi attualmente più usati.

Negli anni ottanta, l'avvento dell'analisi di serie temporali non lineari e le proprietà che si sono scoperte dei sistemi caotici, hanno reso possibile non solo di qualificare ma anche di quantificare il comportamento di alcuni sistemi complessi. Con tali tecniche che consistono nel rappresentare tali sistemi geometricamente in spazi degli stati multidimensionali, si è riusciti in qualche caso a predire comportamenti caotici. Una prima applicazione della teoria del caos ai dati delle maree nella laguna di Venezia è stata sviluppata da Vittori (1993) usando il metodo di ricostruzione dello spazio degli stati tramite ritardo temporale proposto da Takens (1981). Vittori (1993) conclude che il sistema ha un carattere caotico nel senso deterministico. Il ritardo è stato calcolato in modo empirico ed è stato scelto un valore di 200 ore nella maggior parte dei calcoli. La dimensione dello spazio ricostruito è stata calcolata usando la dimensione di correlazione (Grassberger and Procaccia, 1983) come proprietà invariante ed è stato ottenuto un valore di circa 6. Con questi due valori il più grande esponente di Lyapunov (e quindi la stima dell'intervallo di predicibilità), è stato calcolato usando l'algoritmo sviluppato da Wolf *et al*. (1985) ed ha un valore di circa 40 ore. Tuttavia ci sono alcuni punti interrogativi: un ritardo temporale di 200 ore sembra essere troppo lungo per poter supporre che ci sia qualsiasi tipo di correlazione tra i dati ed una predicibilità di 40 ore usando solo i dati del livello dell'acqua è in disaccordo con gli attuali metodi di valutazione. Inoltre non ci sono errori standard nella previsione del livello dell'acqua quindi non è possibile confrontare i risultati con quelli ottenuti con tecniche stocastiche. In un lavoro recente, Bergamasco *et al*. (1995) hanno studiato i dati del livello dell'acqua misurati su una piattaforma off-shore a circa 20 km da Venezia nella parte più a nord del mare Adriatico. Anche se essi hanno trovato un valore finito per la dimensione di ricostruzione (circa 7) ed un valore positivo per il più grande esponente di Lyapunov, essi concludono che i dati sono essenzialmente stocastici ed i valori ottenuti per la dimensione di ricostruzione e per l'esponente di Lyapunov sono dovuti ad anomali comportamenti di certi processi random quasi-gaussiani.

In questo lavoro si è cercato di sviluppare ulteriormente questo tipo di analisi di serie temporali non lineari usando la ricostruzione dello spazio degli stati tramite un ritardo temporale delle une rispetto alle altre. Per calcolare i parametri della ricostruzione a partire dai dati al fine di comprendere il comportamento del sistema e di fornire un allarme nel caso di acqua alta improvvisa, sono stati applicati algoritmi recentemente sviluppati (Abarbanel, 1996).

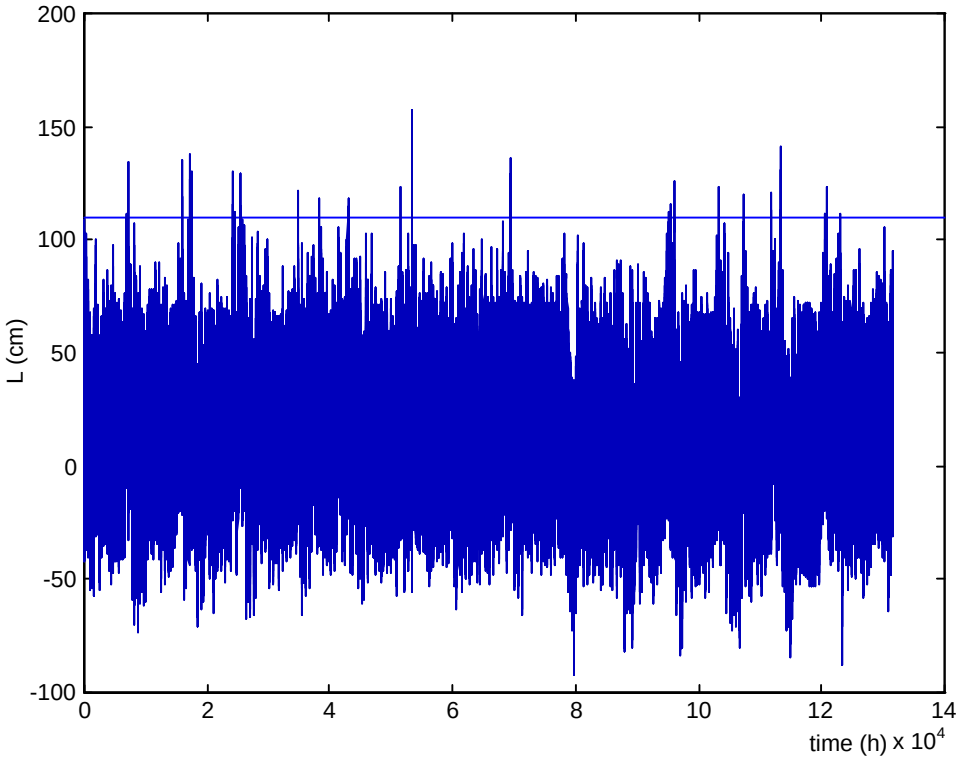

Figura 1.Livello dell'acqua nella laguna di Venezia dal 1980 al 1994.

2. Dati del livello dell'acqua nella Laguna di Venezia

La figura 1 mostra l'andamento del livello dell'acqua nella laguna di Venezia tra il 1980 ed il 1994. È indicato il livello di acqua alta, i. e. 110 cm. Il fenomeno dell'acqua alta ha un comportamento caratteristico durante l'anno. Novembre e Dicembre sono i mesi in cui il fenomeno è più pronunciato mentre durante l'estate non si osserva mai (Moretti e Tomasin, 1984). L'analisi dello spettro di questi dati (Figura 2) mostra l'esistenza di una periodicità legata a maree diurne e semidiurne con un periodo di 12 e 24 ore rispettivamente ed uno spettro continuo tipico del rumore o dei sistemi caotici.

L'andamento del livello dell'acqua è dovuto alla somma di effetti astronomici predicibili e di effetti atmosferici. Togliendo la componente periodica dalla serie temporale si distrugge la struttura dello spazio degli stati (Zaldívar *et al.*, 1997).

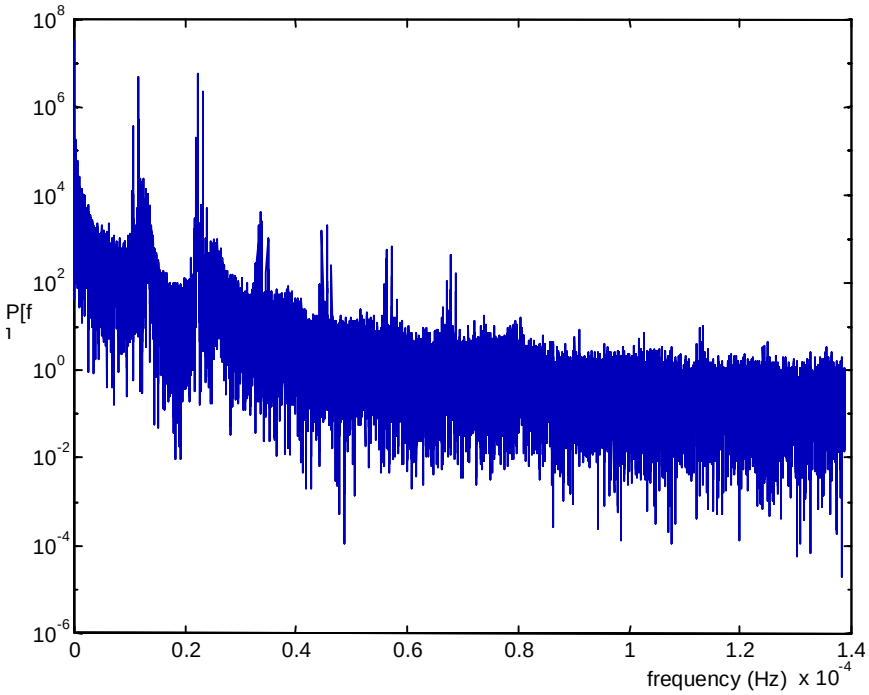

Figura 2. Lo spettro di potenza per i dati in fig. 1.

3. Ricostruzione dello spazio degli stati

La ricostruzione dello spazio degli stati è il primo passo nell'analisi delle serie temporali non lineari provenienti da sistemi caotici. Consideriamo un sistema di d equazioni differenziali ordinarie:

$$d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \qquad (3.1)$$

dove $\mathbf{x}(t)=[x_1(t), x_2(t),... x_d(t)]$ in R^d , $\mathbf{F}=[F_1, F_2,...F_d]$ e $\mathbf{F}\in C^1$ di $\mathbf{x}$.

Una serie temporale è una lista misure di una quantità osservabile nel tempo che, in assenza di rumore, è legata al sistema dinamico da

$$s(t)=h(\mathbf{x}(t)) \qquad (3.2)$$

Il problema della ricostruzione dello spazio degli stati consiste nel ricreare stati quando l'unica informazione disponibile è contenuta nella serie temporale, cioè nel passare da

osservazioni scalari o uni variate ad uno spazio degli stati con più variablili in cui poter studiare il sistema. In genere **F** e h sono entrambe sconosciute, quindi non si può sperare di ricostruire gli stati del sistema nella loro forma originale. È comunque possibile ricostruire uno spazio degli stati che sia equvalente all'originale nel senso che alcune proprietà sono preservate come ad esempio la dimensione frattale e gli esponenti di Lyapunov.

Takens (1981) ha dimostrato che, se la dinamica si svolge in uno spazio euclideo d-dimensionale, una ricostruzione del sistema si può ottenere in uno spazio di dimensione 2d+1 costruito usando derivate o coordinate con ritardo temporale. L'idea che sta alla base di tale ricostruzione è la seguente: se si considera un orbita di un sistema in uno spazio di dimensione maggiore di uno e la si proietta su di un asse, allora l'orbita che si suppone provenire da un sistema di equazioni differenziali autonome, può, in virtù della proiezione, sovrapporsi con se stessa. Non c'è sovrapposizione delle orbite con se stesse nel vero spazio degli stati grazie al teorema di unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali autonome. Se si potesse distendere l' orbita trovando un certo numero di coordinate indipendenti in uno spazio multidimensionale a partire da osservazioni di una sola variabile allora si potrebbe evitare le sovrapposizioni provenienti dalla proiezione proprio come avviene nello spazio reale e descrivere orbite in modo non ambiguo.

Le diverse possibilità esistenti per ricostruire lo spazio degli stati sono, tra le altre: coordinate ottenute tramite un ritardo della serie temporale, coordinate ottennute derivando la serie temporale e coordinate ottenute tramite la decomposizione in valori principali. Il metodo usato per la ricostruzione può dare origine a coordinate molto diverse, ma tuttora non è chiaro quale metodo sia il migliore. La mancanza di una unica soluzione per qualsiasi problema è dovuta alla presenza di rumore ed alla lungezza finita delle serie temporali.

In questo lavoro sono state usate coordinate con ritardo. Una coordinata con ritardo è semplicemente la variabile osservata un certo tempo T nel passato. Le coordinate con ritardo, $\{s(t), s(t-T), s(t-2T), ..., s(n+(d_E-1)T\}$ sono semplici da usare e si possono applicare a sistemi con dimensione qualsiasi mentre non sarebbe pratico calcolare il richiesto numero di derivate. La maggior parte degli studi sulla ricostruzione dello spazio degli stati è centrato sul problema di scegliere il ritardo temporale T per le coordinate con ritardo, e la dimensione di ricostruzione, d_E.

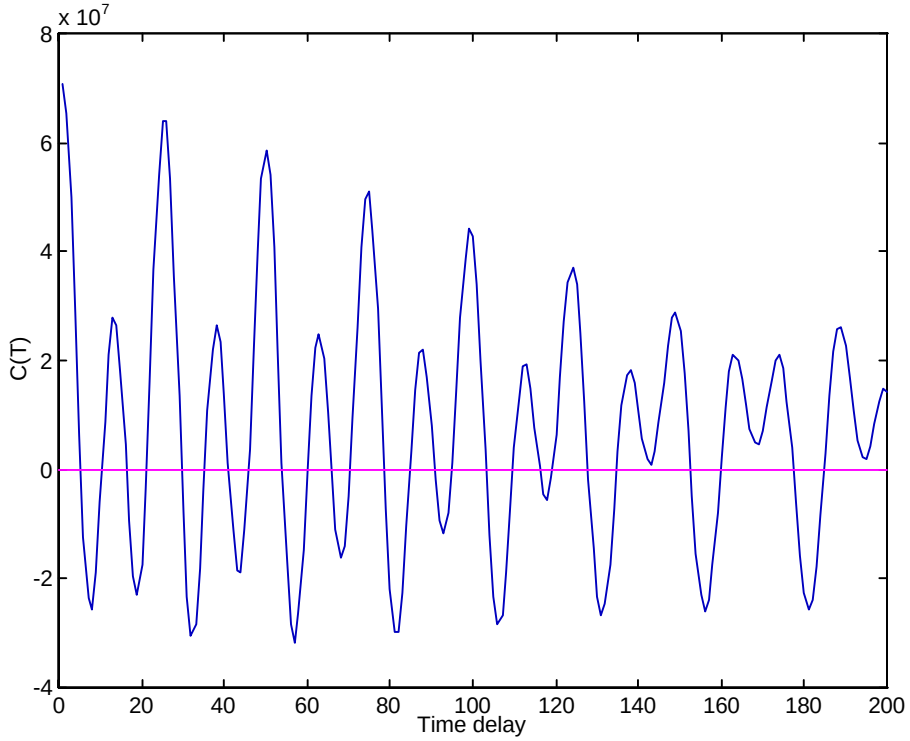

Figura 3. Funzione di autocorrelazione per i dati della laguna di Venezia dal 1980-1989. C(T) ha il suo primo zero in T=6 ore.

3.1. Come calcolare il ritardo temporale

Il primo passo nella ricostruzione dello spazio degli stati è di scegliere il ritardo temporale T ottimale. La letteratura da diversi suggerimenti ma tutti basati su considerazioni empiriche e non sempre forniscono i T migliori:

- Il primo zero della funzione di autocorrelazione, C(T), vedi Mees et al., (1987), che è equivalente alla richiesta di indipendenza lineare di s(t) ed s(t+T).

- Funzione d'informazione mutua. Fraser e Swinney (1986) hanno suggerito di usare il primo minimo della funzione di informazione mutua, I(T), un tipo di funzione di correlazione, per determinare quando i valori di s(n) e s(n+T) sono indipendenti a sufficienza l'uno dall'altro al fine di poter essere usati come coordinate di un sistema di equazioni differenziali ma non così indipendenti da non aver più nessun legame gli uni con gli altri. La funzione d'informazione muta (AMI), può essere calcolata come segue

$$I(T) = \sum_{n,n+T} P(s(n), s(n+T)) \log_2 \left[\frac{P(s(n), s(n+T))}{P(s(n))P(s(n+T))} \right] \quad (3.3)$$

dove P(s(n)) è la densità probabilità dell'evento s(n) e P(s(n),s(n+T)) è la densità di probabilità degli eventi s(n) e s(n+T). In generale il ritardo temporale fornito da AMI è più piccolo di quello calcolato con la funzione C(T) e fornisce un appropriato tempo caratteristico per il moto (ritardo temporale). anche se C(T) è la migliore scelta lineare dal punto di vista della predicibilità, nel senso dei minimi quadrati, di s(n+T) a partire dalla conoscenza di s(n), non è chiaro perché dovrebbe funzionare per sistemi nonlineari ed infatti, in qualche caso è stato dimostrato non funzionare affatto (Abarbanel, 1996).

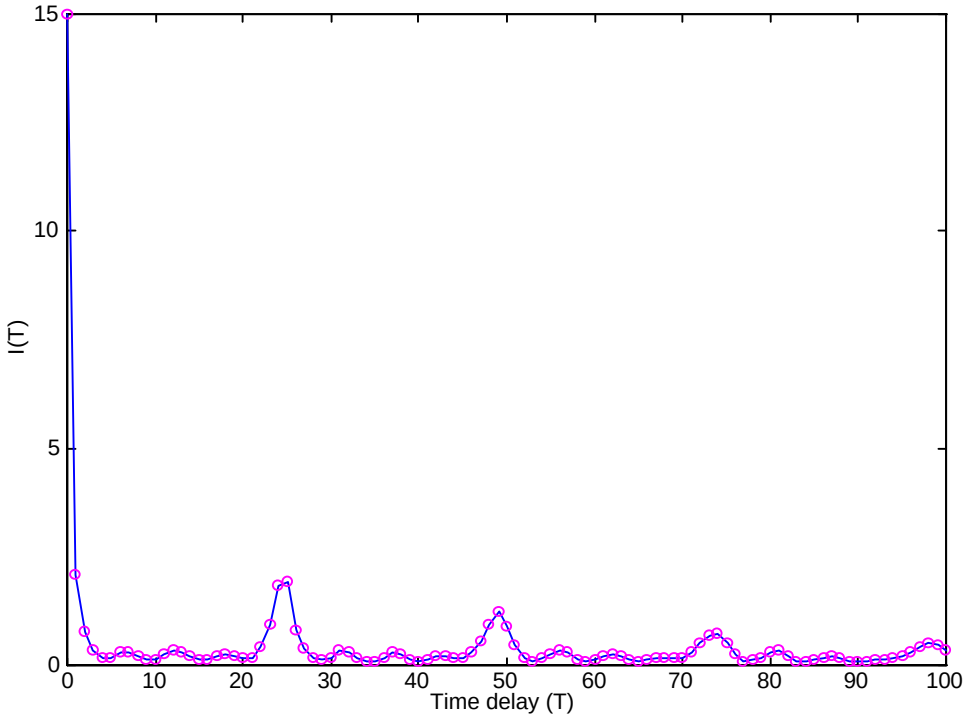

Figura 4. Funzione AMI per i dati della laguna di Venezia rilevati dal 1980 al 1989. I(T) ha il suo primo minimo in T=4.

I dati del livello dell'acqua nella laguna di Venezia dal 1980 al 1989 sono stati usati per calcolare le funzioni C(T) e I(T). Come si può vedere nella figura 3 il primo zero della funzione di autocorrelazione, si ha in T=6 ore. Uguale risultato è stato ottenuto usando i dati dal 1990 al 1994. La figura 4 mostra la funzione AMI per l'insieme di dati sopra citato, in questo caso si ottiene T=4 ore. Risultati simili sono ottenuti usando i dati dal 1990 al 1994 ed entrambe le serie temporali, cioè dal 1980 al 1994. Nel primo caso, usando la funzione AMI si ha T=5 ore, mentre con la serie temporale completa si ha T=4 ore.

3.2. Come scegliere la dimensione di ricostruzione

La dimensione che permette, in uno spazio ricostruito con il ritardo temporale di evitare che le traiettorie sull'attrattore si intersechino, si chiama dimensione di ricostruzione d_E. Essa può essere diversa dalla dimensione dello spazio in cui avviene la dinamica reale, inoltre tale dimensione dipende dalla serie temporale misurata: se si misurano due diverse variabili del sistema non c'è nessuna garanzia che la dimensione di ricostruzione sia la stessa.

Il metodo usuale per scegliere la minima dimensione di ricostruzione è di calcolare alcuni invarianti geometrici dell'attrattore. Aumentando la dimensione di ricostruzione usata si può osservare quando il valore dell'invariante scelto si stabilizza. Poiché gli invarianti sono proprietà geometriche dell'attrattore, essi diventano indipendenti dalla dimensione d per $d \leq d_E$, cioè dal momento in cui le traiettorie sull'attrattore non si intersecano più .

In questo lavoro è stato usato il metodo dei "falsi vicini" (FNN, False Nearest Neighbours) sviluppato da Kennel *et al.* (1992). In questo caso la condizione di non auto intersezione della traiettoria stabilisce che se l'attrattore deve essere ricostruito in R^d, allora tutti i punti vicini in R^d devono essere vicini anche in R^{d+1}. Tale d è scelto essere la dimensione di ricostruzione.

È stato trovato da Kennel *et al.* (1992) che, se l'insieme di dati è privo di rumore, la percentuale di falsi vicini passa da circa il 100% in dimensione uno fino ad arrivare a zero nelle vicinanze di d_E. Inoltre rimane zero da qui in poi poiché l'attrattore non presenterà più intersezioni. Se il segnale è invece contaminato da rumore (segnale con infinite dimensioni) non possiamo osservare il decadimento a zero della percentuale di falsi vicini aumentando la dimensione. In questo caso, a seconda del livello di rumore rispetto al segnale la determinazione di d_E degenererà.

Usando un ritardo temporale di T=6 ore, la percentuale di falsi vicini per i dati del livello dell'acqua dal 1980 al 1989 mostra una rapida caduta a zero in corrispondenza di d_E=7 dopo di che rimane approssimativamente costante, vedi Figura 5. Ciò mette in evidenza che abbiamo a che fare con un sistema con una dimensione "bassa". La veridicità di tale conclusione è rinforzata dal fatto che simili risultati sono ottenuti usando la serie temporale completa, cioè dal 1980 al 1994, o solo la seconda parte, cioè dal 1990 al 1994.

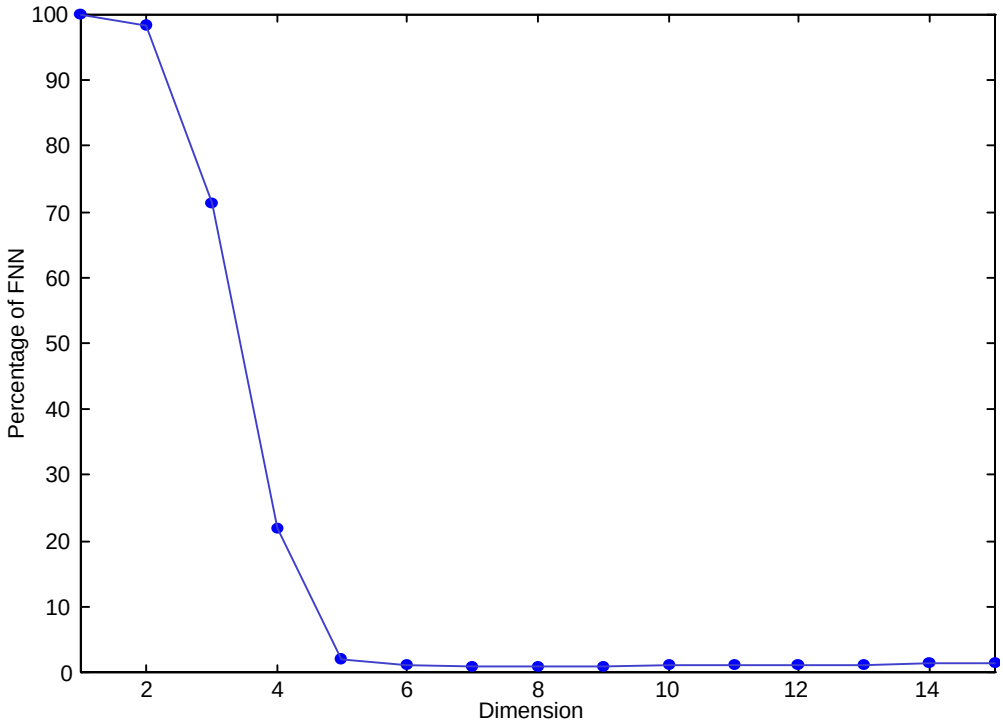

Figura 5. Falsi vicini per i dati del livello dell'acqua nella laguna di Venezia dal 1980 al 1989.

3.3. Come scegliere la dimensione dinamica

Una volta si è determinata la dimensione di ricostruzione richiesta affinché le traiettorie sull'attrattore non si intersechino, viene naturale chiedersi se la dinamica sull'attrattore localmente ha la stessa dimensione che globalmente cioè se il numero di gradi di libertà dinamici, d_L, che determinano l'evoluzione del sistema mentre si muove sull'attrattore coincide con la dimensione di ricostruzione o può essere più bassa. Al fine di calcolare questa dimensione dinamica abbiamo usato il metodo proposto da Abarbanel e Kennel (1993) che consiste nel valutare la percentuale di falsi vicini localmente. Il loro approccio consiste nel lavorare in una dimensione $d \leq d_E$ in modo da assicurare che le traiettorie non si intersechino. In tale spazio essi hanno studiato, data una serie temporale y(k), quale sottospazio di dimensione $d_L \leq d_E$ permette di calcolare accuratamente una funzione che manda l'intorno di uno stato sull'attrattore nell'intorno di quello successivo. Per un numero specificato di vicini, N_B, dello stato y(k), essi forniscono una regola locale per calcolare come questi punti evolvono dopo un passo di tempo nei corrispondenti punti N_B vicini a y(k+1). Quando la percentuale di cattive predizioni diventa indipendente da d_L e dal numero di vicini N_B di y(k) è possibile dire che è stata identificata la corretta dimensione locale che descrive i gradi di libertà attivi nell'istante k.

Nel caso dei dati del livello dell'acqua nella laguna di Venezia, la percentuale di cattive predizioni, vedi figura 6, diventa indipendente dal numero di vicini N_B e dalla dimensione locale d_L=7 e quindi l'attrattore considerato può essere adequatamente descritto da sette gradi di libertà. Risultati simili sono ottenuti usando la seconda porzione della serie temporale o la serie temporale completa 1980-1994 (Zaldívar *et al*., 1997).

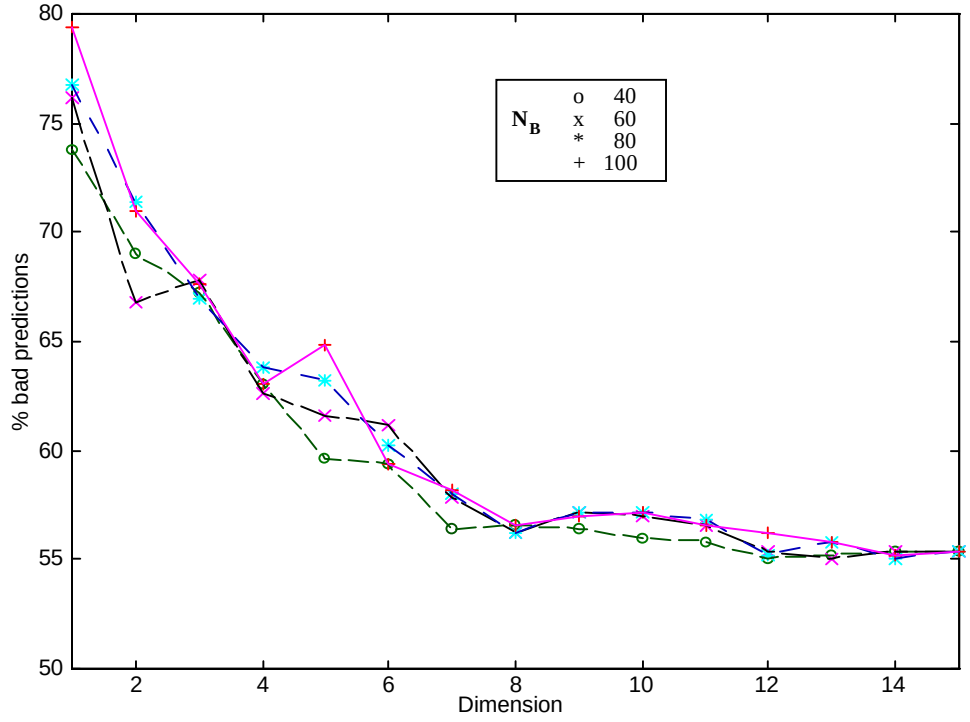

Figura 6. Falsi vicini locali per i dati del livello dell'acqua a Venezia dal 1980 al1989. Dalla figura segue che bisogna scegliere d_L=7.

4. Caratteristiche invarianti

Nel caso di sistemi non lineari le due caratteristiche principali usate come invarianti sono la dimensione frattale e gli esponenti di Lyapunov. La dimensione frattale è una proprietà geometrica dell'attrattore e da informazioni di come i punti sono distribuiti sull'attrattore. La dimensione di alcuni attrattori può essere intera: D=0 per un punto fisso, D=1 per il ciclo limite, etc. Le dimensioni di attrattori di sistemi caotici sono in genere non intere.

4.1. Esponenti di Lyapunov globali

Gli esponenti di Lyapunov misurano l velocita di allontanamemtoo di avvicinamento degli stati sull'attrattore. Dato un sistema dinamico in uno spazio degli stati a d dimensioni, eq. (3.1), è possibile seguire l'evoluzione di una sfera d-dimensionale infinitesima di condizioni iniziali. Questa d-sfera diventerà un d-ellissoide a causa della natura deformante del flusso. Il j-esimo esponente di Lyapunov λ_j, è definito in termini della lunghezza degli assi principali dell'ellissoide al tempo t , $p_j(t)$, come in (Wolf *et al*, 1985):

$$\lambda_j = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_j(t)}{p_j(0)}, \; j = 1,..., d \qquad (4.1)$$

Un esponente di Lyapunov monitorizza il comportamento di due punti vicini in una direzione dello spazio degli stati in funzione del tempo. Se i punti si allontanano l'uno dall'altro in media nel tempo, l'esponente di Lyapunov sarà positivo, se essi convergono l'esponente sarà negativo, se i due punti stanno alla stessa distanza, l'esponente rimarrà vicino a zero. Se si usa la base 2 del logaritmo, gli esponenti sono misurati in bits di informazione al secondo.

Nel caso del livello della laguna di Venezia, i falsi vicini locali diventano quasi totalmente indipendenti da N_B e d vicino a d_L=7 e dopo iniziano a fluttuare. Da tali dati segue che si dovrebbero usare 7 equazioni differenziali per modellare la dinamica del livello dell'acqua per fare predizioni ed anche che 7 è il numero di veri esponenti di Lyapunov di questo tipo di sistema. La Figura 7 mostra i sette esponenti di Lyapunov locali calcolati in avanti ed indietro nel tempo. Come si può vedere due esponenti di Lyapunov sono positivi, uno è vicino a zero e gli altri negativi. I risultati, usando le due parti della serie temporale separate ed unite, sono riassunti nella tabella 1 che da anche la somma di tutti gli esponenti di Lyapunov (negativa, come ci si poteva aspettare per un sistema dissipativo) e la dimensione di Lyapunov (Kaplan e Yorke, 1979), che da valori tra 5.1 e 5.8. Che cosa misura la dimensione di Lyapunov? Il più grande esponente di Lyapunov λ_1 determina come si allungano i segmenti sotto l'azione della dinamica nello spazio degli stati. Le aree crescono esponenzialmente con $\lambda_1+\lambda_2$. I volumi in d dimensioni crescono esponenzialmente con $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_d$. Poiché la somma di tutti gli esponenti deve essere negativa (sistema dissipativo) e il primo esponente è sicuramente positivo (sistemi caotici) esisterà qualche combinazione di esponenti associata ad un volume nello spazio degli stati che non diminuisce e non aumenta. D_L misura la dimensione di tale volume cioè il numero di coordinate (non necessariamente intero) sufficienti a descrivere l'attrattore quando il tempo tende all'infinito.

Tenendo in considerazione che il calcolo degli esponenti di Lyapunov è sensibile alla presenza di rumore, l'accordo tra i diversi insiemi di dati è piuttosto soddisfacente. Inoltre, il calcolo degli esponenti di Lyapunov in avanti ed all'indietro nel tempo da approssimativamente gli stessi risultati e ciò conferma che la dimensione dinamica è stata correttamente calcolata.

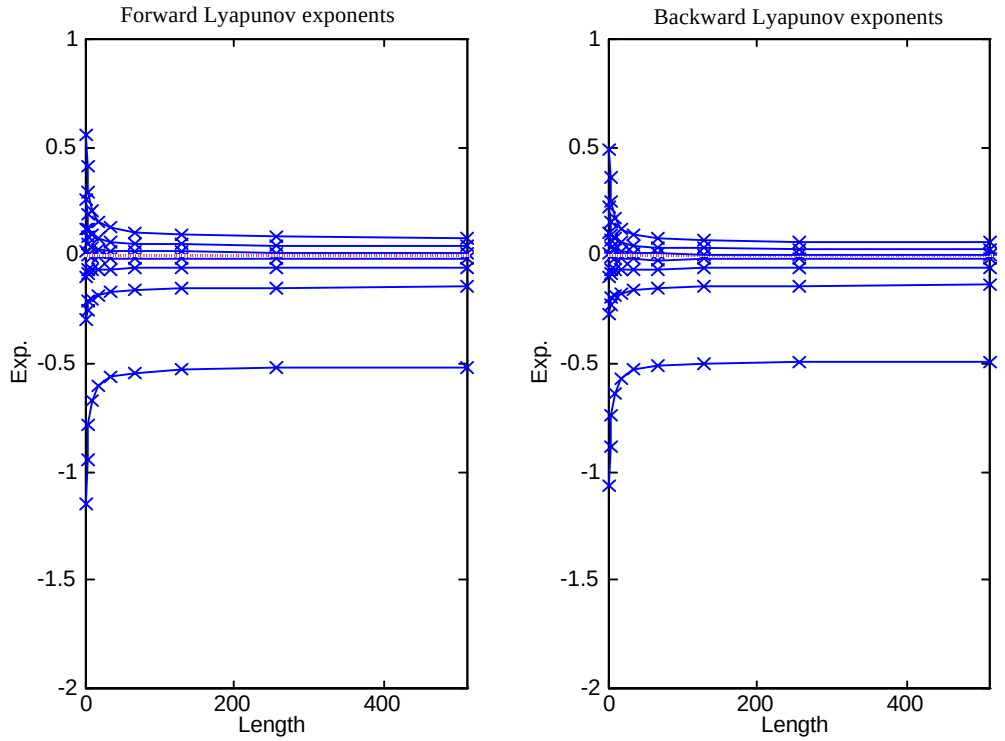

Figura 7. Esponenti di Lyapunov globali per i dati della Laguna di Venezia dal 1980 al 1989, usando T=4 ore in d_E=7.

Il più grande esponente di Lyapunov da un'indicazione del tempo di predizione, la dimensione dinamica da un'indicazione di quanto deve essere complesso il modello per fare predizioni. Poiché il tempo di predicibilità è circa di τ_s/λ_1, dove τ_s è il tempo di acquisizioni di dati, il modello per i dati della laguna di Venezia fornisce predizioni tra 9.45 e 20 ore, quindi ci si può aspettare che per ogni tempo superiore, a causa dell'instabilità intrinsica del sistema , le predizioni saranno inaffidabili.

Tabella 1. Esponenti di Lyapunov calcolati - in avanti (A) ed all'indietro (I) - per i dati della laguna di Venezia.

	1980-1989		1990-1994		1980-1994	
λ_j	A.	I.	A.	I.	A.	I.
1	0.0838	0.0597	0.1059	0.0503	0.1027	0.0666
2	0.0478	0.0284	0.0551	0.0248	0.0551	0.0392
3	0.0138	0.0028	0.0249	0.0026	0.0154	0.0148
4	-0.0175	-0.0168	-0.0118	-0.0206	-0.0121	-0.0150
5	-0.0544	-0.0569	-0.0545	-0.0485	-0.0549	-0.0550
6	-0.1462	-0.1360	-0.1400	-0.1199	-0.1619	-0.1562
7	-0.5159	-0.6078	-0.3867	-0.3033	-0.5392	-0.4985
Sum	-0.5886	-0.6078	-0.4070	-0.4115	-0.5950	-0.6041
$\mathbf{D_L}$	5.5027	5.1265	5.8543	5.0717	5.6559	5.3294

5. Predizione dell'acqua alta

Dopo aver caratterizzato il comportamento del livello dell'acqua nella laguna di Venezia ed i limiti di predicibilità vogliamo ora usare tali informazioni per predirre la sua evoluzione.

Il metodo per fare predizioni a corto termine del comportamento di serie temporali caotiche è stato introdotto dapprima da Farmer e Sidorowich (1987). Data la serie temporale **y**(k), si sa che la sua orbita giace su un attrattore compatto nello spazio degli stati e che ogni punto ha, vicino a sé, un insieme di punti che evolvono seguendo la stessa dinamica nello sazio degli stati. Si può usare questa conoscenza dell'evoluzione degli intorni dello spazio degli stati per fare predizioni tramite la costruzione di funzioni locali o globali dipendenti da un parametro **a**: **y**->**F**(**y**,**a**), che fanno evolvere ogni **y**(k) in **y**(k+1). Usando la informazione di come evolvono gli intorni e i parametri dello spazio degli stati si può costruire un modello e quindi usare tale modello per estendere l'evoluzione degli ultimi punti delle nostre osservazioni in avanti nel tempo. Ci sono diversi approcci (Casdagli, 1989), per trovare una funzione predittrice **F**. Questi approcci possono essere divisi, principalmenti in locali e globali. Nei modelli locali si considerano funzioni che mandano intorni locali in intorni locali mentre nei modelli globali si cerca di

aggiustare contemporaneamente tutti i dati dello spazio degli stati. In questo lavoro abbiamo usato solo modelli locali.

5.1 Modelli locali

I modelli locali mandano intorni locali in intorni locali nello spazio degli stati. Si parte da una prima approssimazione della dinamica **x**->**F**(**x**,k) nell'intorno dell'osservazione **y**(k):

$$F(x,k) = \sum_{m=1}^{M} c(m,k)\phi_m(x) \qquad (5.1)$$

y(k) evolve in **y**(k+1) come segue:

$$y(k+1) = F(y(k),k) = \sum_{m=1}^{M} c(m.k)\phi_m(y(k)) \qquad (5.2)$$

Le funzioni $\phi_m(\mathbf{x})$ possono essere ad esempio polinomi o radial basis . La decisione di quale tipo di funzioni usare è legata al tipo di problema e alla quantità di dati disponibili. Per determinare i coefficienti del modello, si scelgono N_B falsi vicini e si minimizza l'errore. Questo è un problema di minimi quadrati che si può risolvere in modo efficiente usando tecniche standard. In questo modo si ottiene una funzione ottimale dal punto di vista predittivo, ad esempio un polinomio ottimale di un certo grado d. Una volta determinati i **c**(m,k) coefficienti, è possibile costruire una tavola di interpolazione e quindi un modello locale associato ad ogni punto **y**(k) osservato sull'attrattore.

Lo scarto quadratico medio della predizione dovrebbe diminuire dopo un numero L di predizioni come segue, vedi Casdagli (1989):

$$N^{-(P+1)/d_L} e^{Lh} \qquad (5.3)$$

dove N è il numero di punti noti dell'attrattore, P è il massimo ordine dei polinomi usati ed h è l'entropia metrica che coincide con la somma degli esponenti di Lyapunov positivi. Nei casi più favorevoli la legge di diminuzione dell'errore (scaling law) sarà proporzionale a λ_1 cioè al più grande esponente di Lyapunov:

$$N^{-(P+1)/d_L} e^{L\lambda_1} \qquad (5.4)$$

Tabella 2. Scarto quadratico medio della predizione dei dati della laguna di Venezia usando modelli lineari e quadratici.

Number of steps ahead	**P = 1 (cm)**	**P = 2 (cm)**
1	8.6995	9.6331
2	10.7800	11.8735
3	12.1368	13.1748
4	13.0095	13.8931
5	13.5749	14.2732
10	13.8013	13.9902
15	13.9052	14.2639
20	14.1861	14.4195
25	15.2897	15.5572
30	17.6284	17.6689
35	17.7419	17.7789
40	17.9505	18.1174
45	17.9868	18.3467
50	18.9391	19.2685
55	20.2376	20.4060
60	20.6674	20.7739

5.2. Predizione dell'acqua alta nella laguna di Venezia

La tabella 2 mostra lo scarto quadratico medio nel caso di modelli costruiti con polinomi di primo e di secondo grado. Il calcolo è stato fatto usando 68000 dati nello spazio degli stati ricostruito con d_E=7 e d_L=7. Sono state esaminate duemila condizioni iniziali diverse ed è stata considerata la media dei risultati ottenuti. Da come si può vedere le predizioni ottenute usando predittori di secondo grado sono peggiori o uguali di quelle che si ottengono usando predittori lineari. Casdagli (1989) sottolinea ciò affermando che per sistemi complessi e dove si ha a disposizione un gran numero di dati, non ci sono vantaggi nell'usare predittori quadratici rispetto a predittori lineari.

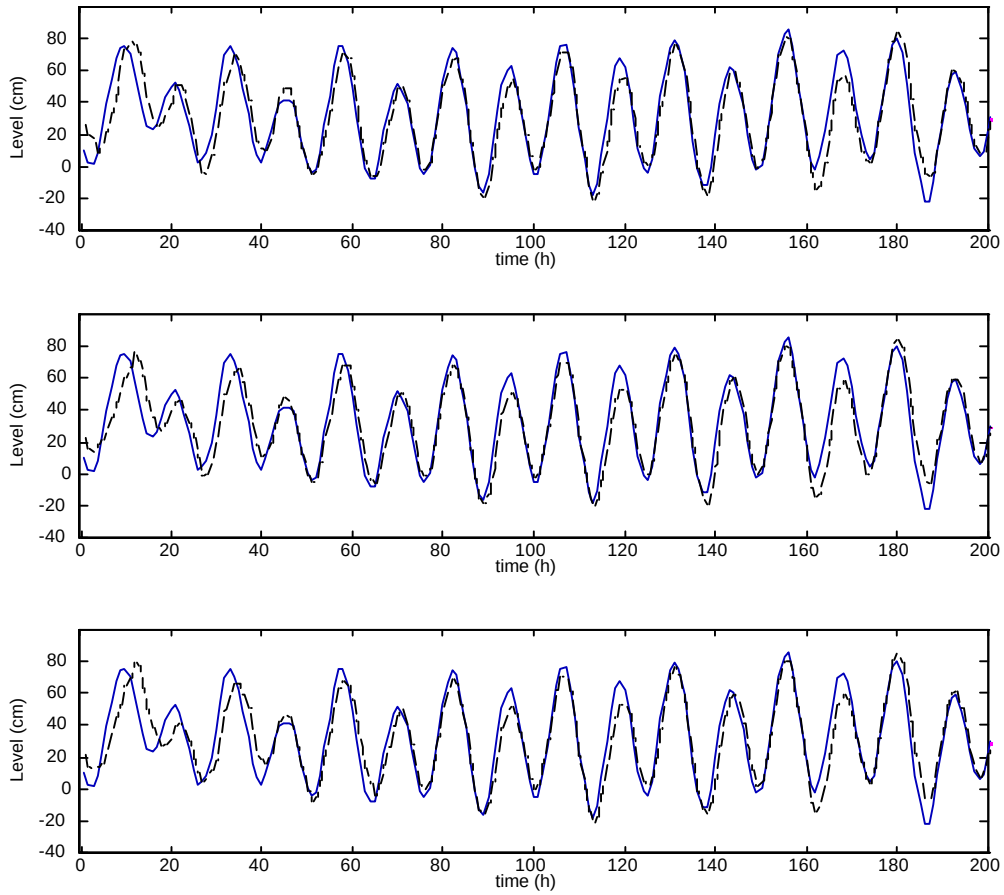

Figura 8. Livello dell'acqua osservato e predetto (linea discontinua) nella laguna di Venezia, usando tre, sei e dodici ore di predizione.

Diverse predizioni per il livello dell'acqua nella laguna di Venezia sono mostrate nelle figure 8-9 . In figura 9 si considera una porzione della serie temporale contenente il fenomeno di acqua alta a differenza della porzione di dati rappresentati in figura 8 . In entrambe le figure sono presentate predizioni con un anticipo di tre, sei dodici ore. Come si può vedere dalla figura 8 l'evoluzione del livello dell'acqua è ben predetto in tutti e tre i casi. d'altra parte, in figura 9 la predizione sbaglia proprio in corrispondenza del fenomeno di acqua alta. Il fatto che le predizioni siano simili per tre , sei e dodici ore è in contraddizzione con il calcolo degli esponenti di Lyapunov che darebbero un aumento esponenziale dello scarto quadratico medio della predizione.

I metodi di predizione non lineari sono stati usati per distinguere tra caos deterministico e segnali periodici più rumore scorrelato (cioè tale che la serie temporale sia scorrelata già nella prima differenza finita). L'idea che sta alla base dell'utilizzo di predizioni non lineari per distinguere la presenza di caos è la possibilità di fare predizioni per un certo, anche se in genere "breve ", periodo di tempo tipica dei sistemi caotici. Il rumore additivo produce invece un errore costante al variare del tempo di predizione.

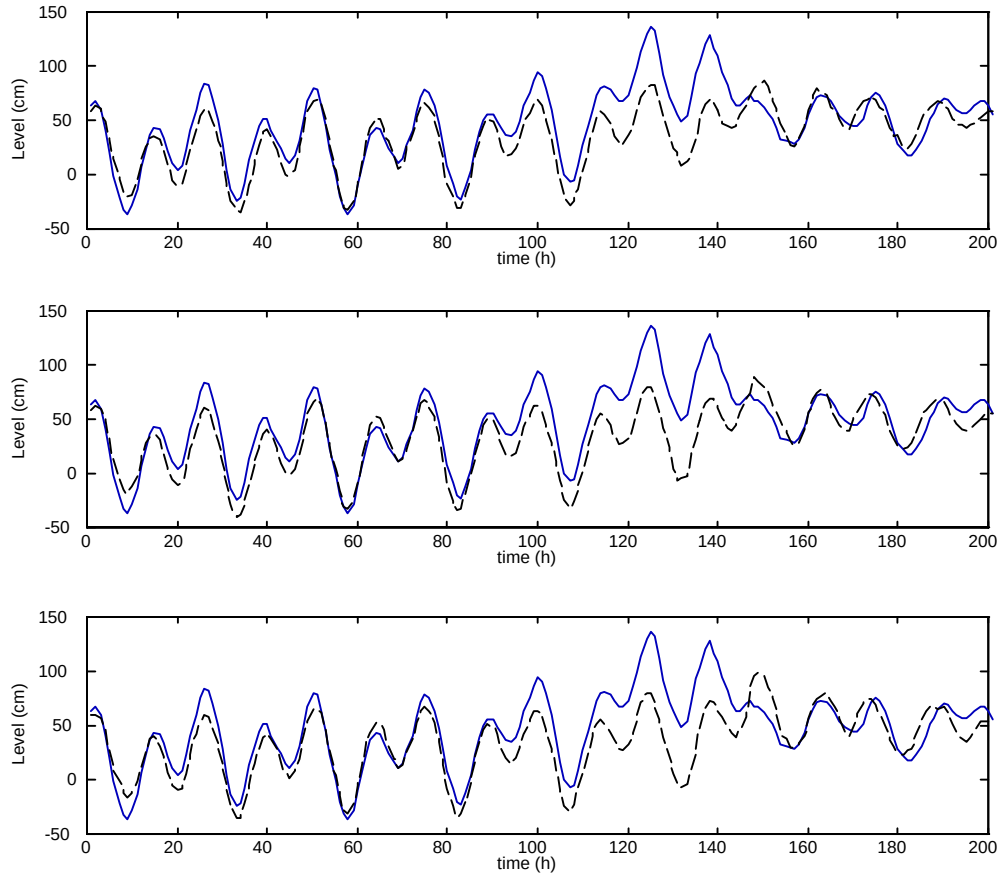

Figura 9. Livello dell'acqua osservato e predetto (linea discontinua) nella laguna di Venezia, usando tre, sei e dodici ore di predizione. Si può notare il fenomeno dell'acqua alta.

Dall'analisi del livello dell'acqua della laguna di Venezia si è potuta osservare una decrescita della capacità predittiva con il passare del tempo che comunque non scala esponenzialmente in funzione del più grande esponente di Lyapunov come ci si aspetterebbe per un segnale caotico, vedi figura 10. Il tipo di andamento dello scarto quadratico medio della previsione dei dati della laguna di Venezia indica che si può trattare di una sequenza frattale random. Tali sequenze hanno le stesse caratteristiche dei segnali caotici (numero finito di esponenti di Lyapunov, etc.) ma un diverso andamento della qualità di predizione appunto. Tsonis e Elsner, (1992) hanno mostrato che anche la correlazione tra valori predetti e reali di una sequenza frattale random diminuiscono con il tempo, ma non esonenzialmente come i sistemi caotici.

Per vedere se il livello dell'acqua nella laguna di Venezia ha le caratteristiche di una sequenza frattale random abbiamo usato l'approccio di Hurst, vedi Manella *et al*. (1994), in cui l'insieme dei processi random è suddiviso in base alla varianza che diventa così una nuova variabile dipendente dalla lunghezza della serie temporale. Comunque l'analisi di Hurst applicata ai dati della laguna di Venezia non da una risposta chiara a questa domanda, vedi Zaldívar et al. (1997)

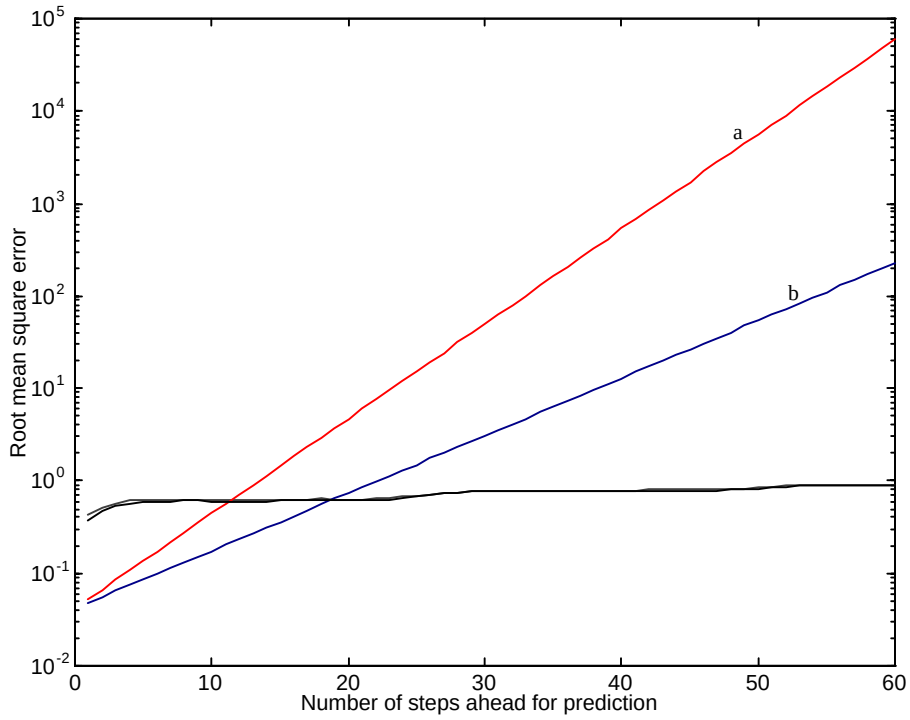

Figura 10. Errore quadratico medio per modelli costruiti con polinomi di primo e secondo grado per i dati del livello dell'acqua nella laguna di Venezia in unità di misura dell'attrattore. La pendenza di a e b rappresentano le leggi di variazione dgli errori di predizione dati dalle equazioni (5.3) e (5.4).

6. Conclusioni

Una serie temporale dei dati del livello dell'acqua in un punto della laguna di Venezia è stato analizzato usando la ricostruzione dello spazio delle fasi tramite un ritardo temporale al fine di comprendere la dinamica non lineare del sistema e di fornire una previsione di acqua alta improvvisa. L'analisi usando le tecniche standard di ricostruzione usando il ritardo temporale sembra indicare la presenza di una dinamica caotica in senso deterministico (bassa dimensione). Benché sia sempre possibile definire un vettore con ritardo temporale a partire da un serie di dati, non sempre è possibile identificare strutture significative nei dati così rappresentati. Siccome la corrispondenza tra il vettore con ritardo e lo stato del sistema corrispondente non si conosce, il valore esatto di un punto ricostruito non è significativo. Nel nostro caso, analizzando lo scarto quadratico medio della predizione sembra che il comportamento corrisponda a quello di una sequenza frattale random.

Dall'analisi fatta in questo lavoro segue che la predizione ottenuta usando tecniche della teoria dei sistemi caotici produce buoni risultati nel caso del di comportamento dinamico "normale" dell'acqua nella laguna di Venezia, ma non riesce a prevedere il fenomeno dell'acqua alta. Qusta mancanza può essere comunque usata proprio per prevedere il fenomeno dell'acqua alta osservando l'aumento dell'errore di predizione ata per definire un valore limite oltre il quale si è in stato di allarme.

Si spera che queste tecniche possano essere usate per implementare un sistema per fare previsioni con sufficiente anticipo del fenomeno dell'acqua alta improvvisa e che permetta, in caso di necessità di prendere le misure necessarie.

Bibliografia.

Abarbanel, H.D.I., 1996, *Analysis of observed chaotic data*, New York:Springer.

Abarbanel, H.D.I. & M. B. Kennel 1993. Local false neigbours and dynamical dimension from observed chaotic data. *Phys. Rev. E* 47:3057-3068.

Bergamasco, L, M. Serio, A.R. Osborne & L. Cavaleri 1995. Finite correlation dimension and positive Lyapunov exponents for surface wave data in the Adriatic sea near Venice. *Fractals* 3:55-78.

Casdagli, M. 1989. Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D* 35: 335-356.

Farmer, J. D. & J.J. Sidorowich 1987. Predicting chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* 59:845-848.

Fraser, A. & H. Swinney 1986.Independent coordinates for strange attractors from mutual informaton.*Phys.Rew.A* 33:1134-1140.

Kaplan, J. L. & J.A. Yorke 1979. Chaotic behavior in multidimensional difference equations. In Peitgen H. O. and Walther, H. O. (eds.) *Functional Differential equations and approximation of fixed points*, 204-227. Berlin:Springer.

Grassberger, P. & I. Procaccia 1983. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett*. 50:346-349.

Kennel, M.B., R. Brown & H.D.I. Abarbanel 1992. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction. *Phys. Rev. A* 45:3403-3411.

Mannella R., P. Grigolini & B.J. West 1994. A dynamical approach to fractional brownian motion. *Fractals* 2:81-94.

Mees, A.I., P.E. Rapp & L.S. Jennings 1987. Singular value decomposition and embedding dim.*Phys. Rev. A* 36:340-350.

Michelato, A., R. Mosetti & D. Viezzoli 1983. Statistical forecasting of storm surges: An application to the Venice Lagoon. *Boll. di Oceanologia Teor. ed Appl*. 1: 67-76.

Moretti, E. & A. Tomasin 1984. Un contributo matematico all'elaborazione previsionale dei dati di marea a Venezia. *Boll. di Oceanologia Teor. ed Appl*. 2:45-61.

Osborne, A.R. & A. Pastorello 1993. Simultaneous occurrence of low-dimensional chaos and colored random noise in nonlinear physical systems. *Physics Lett. A* 181:159-171

Packard, N., J. Crutchfield, D. Farmer & R. Shaw 1980. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett*. 45:712-715.

Takens, F., 1981. Dynamical Systems and Turbulence.In A. Rand & L.S. Young (ed.), *Lecture Notes in Mathematics* vol. 898, 366. Berlin:Sringer.

Tomasin, A. 1973. A computer simulation of the Adriatic Sea for the study of its dynamics and for the forecasting of floods in the town of Venice. *Comp. Phys. Comm.* 5:51-61.

Tsonis, A.A. & J.B. Elsner 1992. Nonlinear prediction as a way of distinguishing chaos from random fractal sequences. *Nature* 358: 217-220.

Vittori, G. 1993. Caos deterministico nelle oscillazioni di marea a Venezia. *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti* 151:23-61.

Wolf A., J.B. Swift, H.R. Swinne & J.A. Vastan 1985. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica 16D*:285-317.

Zaldivar, J. M.,F.Strozzi, E. Gutierrez & A. Tomasin 1997. Non-linear time series analysis: Forecasting high waters at Venice Lagoon. *EUR Report 17317*. Ispra: E.C.