SULLA DECOMPOSIZIONE DELLE FORME QUADRATICHE DI VARIABILI NORMALI IN COMPONENTI SFERICHE

G.Pederzoli
Istituto di Metodi Quantitativi
Università Cattaneo

Sommario

Si considera il rapporto tra due forme quadratiche di variabili normali indipendenti e la sua distribuzione sulla ipersfera unitaria. Viene poi ottenuta una decomposizione per forme quadratiche in termini di vettori aleatori di tipo sferico. Si ottengono infine le espressioni esatte per la densità di probabilità in alcuni casi particolari.

Classificazione AMS: 62H10; 62H99
Parole chiave: Variabili normali multivariate, distribuzioni sferiche, forme quadratiche

1. Introduzione

Tra le distribuzioni multivariate continue quelle a contorno ellittico ed in particolare quelle chiamate sferiche godono di proprietà importanti sia per la costruzione del modello che per l'analisi inferenziale. Sviluppi teorici e applicazioni pratiche sono riportate, ad esempio, sia nell'articolo di Kelker (1970) che nella monografia di Fang, Kotz and Ng (1990).

Di particolare interesse nello studio della correlazione seriale è il rapporto tra due particolari forme quadratiche di variabili normali indipendenti. La distribuzione di forme quadratiche (sia omogenee che non omogenee) è stata studiata da Ruben (1960, 1962) in relazione al contenuto volumetrico di probabilità per insiemi convessi in $\Re^n$. Per una trattazione sistematica e moderna sulle forme quadratiche di variabili aleatorie si consulti il volume di Mathai and Provost (1992). Ulteriori risultati sull'indipendenza delle forme bilineari sono stati ottenuti da Pederzoli (1997), mentre il contributo di Provost (1996) riguarda la distribuzione volumetrica di coni definiti in campi aleatori sferici.

Indipendentemente dai lavori di von Neumann (1941, 1942) e quello di Koopmans (1942), per questa particolare forma quadrata viene derivata una decomposizione in un numero finito di componenti vettoriali di tipo sferico. Espressioni esatte per la funzione di densità di questa forma quadratica vengono ottenute per due casi particolari.

2. Distribuzioni sferiche

Definizione 2.1: Un vettore p-dimensionale $\mathbf{X}$ ha una distribuzione a contorno ellittico se la sua funzione caratteristica $\Phi(\mathbf{t})$ può scriversi come

$$\Phi(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}\mu}\zeta\left(\mathbf{t}'\sum\mathbf{t}\right) \tag{2.1}$$

dove μ è un vettore reale p-dimensionale, $\sum$ è una matrice $p \times p$ definita non negativa, e $\zeta(\cdot)$ denota una funzione non negativa.

Definizione 2.2: Se μ è il vettore nullo e $\sum$ la matrice identità di ordine p, allora si dice che $\mathbf{X}$ ha una distribuzione sferica

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{S}_p(\zeta) \tag{2.2}$$

dove $\zeta(\mathbf{tt}') = \Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ è la funzione caratteristica di $\mathbf{X}$.

Si constata immediatamente che le distribuzioni sferiche sono casi particolari di distribuzioni a contorno ellittico (per le quali i contorni di densità costante sono degli ellissoidi anziché delle sfere). Una classe più generale di distribuzioni, dette r-sferiche, è stata definita da Fernandez, Osiewalski and Steel (1995) al fine di consentire una maggiore flessibilità nei modelli di analisi multivariata.

Esempio 1: Distribuzione normale multivariata $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(0, I)$ con

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\exp\left\{-\frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{2}\right\}, \mathbf{x} \in \Re^p$$

Esempio 2: Distribuzione Student multivariata $\mathbf{X} \simeq \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\frac{Y}{m}}}$ dove $\mathbf{U} \sim Np(0, I)$ e $Y \sim X^2$, con

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}\right)}{(\pi m)^{\frac{p}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1 + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{m}\right)^{-\frac{p+m}{2}}, \mathbf{x} \in \Re^p$$

Esempio 3: Distribuzione uniforme nella ipersfera di raggio r

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_p(r)} I_{\{\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq r\}}, \ \mathbf{x} \in \Re^p$$

dove $V_p(r) = \frac{\pi^{\frac{p}{2}} r^p}{\Gamma(1+\frac{p}{2})}$ è il contenuto volumetrico della ipersfera p-dimensionale di raggio r.

Esempio 4: Distribuzione uniforme sulla ipersfera di raggio r

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_p(r)} I_{\{\mathbf{x}'\mathbf{x} = r\}}, \ \mathbf{x} \in \Re^p$$

dove $S_p(r) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} r^{p-1}$ è la superficie della ipersfera p-dimensionale di raggio r.

Tra le proprietà delle distribuzioni sferiche ricordiamo che le densità sono della forma $g(\mathbf{x}'\mathbf{x})$, e che i contorni di densità costante sono delle ipersfere con centri nell'origine. Inoltre queste distribuzioni sono invarianti rispetto alle trasformazioni ortogonali, vale a dire $\mathbf{X} \simeq O\mathbf{X}$ dove O indica una matrice ortogonale di dimensione compatibile. In particolare, si veda Fang, Kotz and Ng (1990), $\mathbf{X}$ ammette la rappresentazione stocastica $\mathbf{X} = W\mathbf{U}$ dove $\mathbf{U}$ ha una distribuzione uniforme sulla ipersfera unitaria di dimensione p e W è la distanza del raggio. $\mathbf{U}$ e W sono distribuite in modo indipendente. La densità di $W = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{\frac{1}{2}} = ||\mathbf{X}||$ è data da

$$k_W(w) = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} w^{p-1} g(w^2) & , \ 0 < w < \infty \\ 0 & , \ \text{altrove} \end{cases} \tag{2.3}$$

e la si può valutare passando alle coordinate polari, come indicato in Mathai, Provost and Hayakawa (1995):

$$\begin{aligned} x_1 &= w \sin\theta_1 \\ x_j &= w \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{j-1} \sin\theta_j, j = 2, 3, \ldots, p-1 \\ x_p &= w \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{p-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove $0 < \theta_j \leq \pi$ per $j = 1, 2, \ldots, p-2$, e $0 < \theta_{p-1} \leq 2\pi$.

D'altro canto la densità di $V = \mathbf{X}'\mathbf{X} = W^2$ è data da

$$h_V(v) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} v^{\frac{p}{2}-1} g(v) & , \ 0 < v < \infty \\ 0 & , \ \text{altrove} \end{cases} \tag{2.5}$$

3. Distribuzioni di Dirichlet

Definizione 3.1: Una variabile aleatoria univariata X è distribuita secondo una Beta di parametri α_1 e α_2 se la sua densità è della forma

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{B(x_1,x_2)} &, \quad 0<x<1 \\ &= 0 &, \quad \text{altrove} \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove $B(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$ è la funzione beta, con $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Definizione 3.2: Un vettore aleatorio $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_k)'$ ha una distribuzione di Dirichlet del primo tipo con parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se la sua densità è data da

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{k}\Gamma(\alpha_i)} d_1^{\alpha_1-1} d_2^{\alpha_2-1} \ldots d_k^{\alpha_k-1} \tag{3.2}$$

dove $d_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} d_i$ per $0 \le d_i \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, e 0 altrimenti.

Come si vede facilmente, questa non è che la distribuzione Beta multivariata e scriveremo

$$(D_1, D_2, \ldots, D_k)' \sim D_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \tag{3.3}$$

Esempio Se il vettore $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ è distribuito uniformemente nel simplesso $S = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n \,|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \le 1,\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots n\right\}$ allora la densità di $\mathbf{X}$ è data da $[Vol(S)]^{-1} = n!$ e le relative distribuzioni marginali di dimensione $(n-1)$, vale a dire $f(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ sono delle distribuzioni di Dirichlet.

Ricordiamo il risultato seguente:

Proposizione Sia $Y_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ e si supponga che le Y_j siano mutuamente e indipendentemente distribuite. Se $Y = \sum_{i=1}^{k} Y_j$ allora

$$\left(\frac{Y_1}{Y}, \frac{Y_2}{Y}, \ldots, \frac{Y_k}{Y}\right)' \sim D_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k) \tag{3.4}$$

In particolare, qualora la Y_j fossero delle chi-quadrato indipendenti $\mathbf{X}_1^2$ allora si avrebbe che

$$\left(\frac{Y_1}{Y}, \frac{Y_2}{Y}, \ldots, \frac{Y_k}{Y}\right)' \sim D_k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \tag{3.5}$$

Estensioni delle distribuzioni di Dirichlet al caso in cui l'argomento è una matrice reale $p \times p$ definita positiva sono trattate in Mathai (1997).

4. Distribuzione di una Forma Quadratica sulla Ipersfera

Si considerino due forme quadratiche in p variabili normali indipendenti con media nulla e varianza unitaria

$$P = \sum_{i=1}^{p} X_i^2 \text{ e } Q = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2 \tag{4.1}$$

Mentre tutti i valori caratteristici di P sono uguali ad uno, quelli di Q si suppongono diversi l'uno dall'altro in modo da consentire il loro ordinamento crescente $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$. La densità di probabilità di P

$$(2\pi)^{-\frac{p}{2}} e^{-\frac{1}{2}P} \tag{4.2}$$

è costante sulla ipersfera $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_p^2 = c$; la corrispondente funzione di ripartizione

$$\frac{P^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}P}}{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \tag{4.3}$$

è una chi-quadrato con p gradi di libertà. Le ipersuperfici sulle quali il rapporto

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2}{\sum_{i=1}^{p} X_i^2} = \frac{Q}{P} \tag{4.4}$$

è costante non sono altro che dei coni con il vertice nell'origine che sezionano la medesima porzione della superficie di ogni ipersfera $P = c$. Ne segue che la distribuzione condizionata di Z per un dato valore di P è indipendente dal valore della costante c e sarà quindi uguale alla sua funzione di distribuzione. In altre parole, le variabili aleatorie P e Z risultano distribuite in modo indipendente e di conseguenza la funzione di ripartizione per Z potrà descriversi come quella condizionata di Q sulla ipersfera unitaria $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_p^2 = 1$. Impiegando il teorema d'inversione per le funzioni caratteristiche, Koopmans (1942) ha trovato l'espressione esatta della funzione di ripartizione per Z. Questa funzione è stata studiata per il caso in cui p è pari da von Neumann (1941, 1942), ma

soltanto per particolari valori dei valori caratteristici. Riportiamo l'espressione per la derivata di ordine $\frac{p}{2}-1$ della densità per Z in una forma leggermente diversa da quella originale.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \dfrac{\left(\frac{p}{2}-1\right)!}{\pi}\dfrac{(-1)^{\frac{p-t-1}{2}}}{\prod_{s=1}^{p}|z-\lambda_s|^{\frac{1}{2}}} & , \text{ per } \lambda_t < z < \lambda_{t+1} \text{ e } t \text{ dispari} \\ \text{(ii)} & \text{non esiste} & , \text{ per } z=\lambda_t,\ t=1,2,\ldots,p \\ \text{(iii)} & \text{nulla} & , \text{ per tutti gli altri valori di } z \end{array} \tag{4.5}$$

5. Decomposizione di una Forma Quadratica in Vettori Sferici

Sia $\mathbf{Y} \sim Sp(\zeta)$ con densità di probabilità $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y}'\mathbf{y})$. Allora, ponendo $\mathbf{X} = O\mathbf{Y}$ dove O è una matrice ortogonale, per l'invarianza delle distribuzioni sferiche si ha che $\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y} \simeq W\mathbf{U}$ dove $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2 \ldots, Y_P)'$, $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_P)'$, W rappresenta la distribuzione del raggio e $\mathbf{U}$ è uniformemente distribuita sulla sfera unitaria p-dimensionale. W e $\mathbf{U}$ sono distribuite in modo indipendente.

Se A è una matrice simmetrica e $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ indicano le radici caratteristiche di A, allora la forma quadratica $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}$ ammette la decomposizione seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'A\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}'Q'QAQ'Q\mathbf{Y} \\ &\simeq \mathbf{X}'\Lambda\mathbf{X} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2 \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2}\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

D'altro canto,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'A\mathbf{Y} &\simeq W^2(\mathbf{U}'\Lambda\mathbf{U}) \\ &= W^2\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2\right) \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

e pertanto

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2} \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2,\ \forall\, \mathbf{X} \in Sp(\cdot) \tag{5.3}$$

Prendendo $\mathbf{X} \sim Np(0, I)$, dalla (3.5) segue che

$$\left(\frac{X_1^2}{\|\mathbf{X}\|^2}, \frac{X_2^2}{\|\mathbf{X}\|^2}, \ldots, \frac{X_p^2}{\|\mathbf{X}\|^2}\right) = (D_1, D_2, \ldots, D_p) \sim D_p\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$$

e quindi

$$Z \equiv \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i^2 \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2} \simeq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_i; \ \forall\, \mathbf{X} \in Sp(\cdot) \tag{5.4}$$

Dato che $\mathbf{Y}'A\mathbf{Y} \sim VZ$ dove $V = \mathbf{W}^2 = \|\mathbf{X}\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2, Z$ risulta distribuita come sopra e indipendentemente da V; infatti,

$$Z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X_i^2}{\|\mathbf{X}\|^2} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{W\psi_i(\theta)}{W^2}$$

che è indipendente da $W^2 = V$.

La densità di $V = \mathbf{Y}'\mathbf{Y}$ è data da

$$h_V(v) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} v^{\frac{p}{2}-1} g(v) & , \ 0 < v < \infty \\ 0 & , \ \text{altrove} \end{cases} \tag{5.5}$$

dove $g(\cdot)$ è tale che $g(\mathbf{y}'\mathbf{y}) = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$.

Infine, siccome $L = Y'AY \sim VZ$, si avrà che

$$f_L(l) = \int_0^\infty \frac{1}{v} k_Z\left(\frac{l}{v}\right) h_V(v)\, dv \tag{5.6}$$

dove $k_Z(\cdot)$ denota la densità di Z e

$$F_L(l) = \int_0^\infty K_Z\left(\frac{l}{v}\right) h_V(v)\, dv \tag{5.7}$$

dove $K_Z(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di Z.

Esaminiamo per concludere qualche caso particolare. Sia $\mathbf{X} \sim Sp(\cdot)$ con $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ e si consideri la variabile $Z = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i^2}{\sum_{i=1}^{p} X_i^2}$ con $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ per $i = 1, 2, \ldots, p-1$. Come abbiamo visto Z

è indipendente da $||\mathbf{X}||^2 = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{p} X_i^2$. Senza perdere in generalità, si supponga $\mathbf{X} \sim Np(0, I)$. Allora, per $p = 2$ si ottiene

$$Z = \frac{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2^2}{X_1^2 + X_2^2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \frac{X_2^2}{X_1^2}}{1 + \frac{X_2^2}{X_1^2}} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + \frac{X_2^2}{X_1^2}} + \lambda_2$$

dove $\frac{X_2^2}{X_1^2} \sim F_{1,1}$. La densità di probabilità si riduce a

$$k_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{(z-\lambda_1)(\lambda_2-z)}} & , \quad \lambda_1 < Z < \lambda_2 \\ 0 & , \quad \text{altrove.} \end{cases}$$

Per $p = 4$, si ottiene che

$$\frac{dk_Z(z)}{dz} \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{(z-\lambda_1)(\lambda_2-z)(\lambda_3-z)(\lambda_4-z)}} & . \quad \lambda_1 < z < \lambda_2 \\ 0 & . \quad \lambda_2 < z < \lambda_3 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)(\lambda_4-z)}} & . \quad \lambda_3 < z < \lambda_4 \end{cases}$$

Bibliografia.

Fang, K.T., Kotz, S. and Ng. K.W. (1900): Symmetric Multivariate and Related Distributions, Chapman and Hall, London

Fernandez, C., Osiewalski, J. and Steel, M.F.J. (1995): Modeling and inference with v-spherical distributions, Journal of the American Statistical Association, 90, No. 432, 1331-1340

Kelker, D. (1970): Distribution theory of spherical distributions and a location-scale generalization, Sankhya, Ser. A, 32, 419-430.

Koopmans, T. (1942): Serial correlation and quadratic forms in normal variables, Annals of Mathematical Statistics, 13, 14-33

Mathai, A.M. (1997): Jacobians of Matrix Transformations and Functions of Matrix Argument. In corso di stampa.

Mathai, A.M. and Provost, S.B. (1992): Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications, Marcel Dekker, New York.

Mathai, A.M., Provost, S.B. and Hayakawa, T. (1995): Bilinear Forms and Zonal Polynomials, Springer-Verlag, Lecture Notes in Statistics, 102, New York.

Pederzoli G. (1997): On the independence of bilinear forms in normal variables. In preparazione.

Provost, S.B. (1996): Probability content of cones in spherically symmetric random fields. Comunicazione privata.

Ruben, H. (1960): Probability content of regions under spherical normal distributions, I, Annals of Mathematical Statistics, 31, 598-618.

Ruben, H. (1962): Probability content of regions under spherical normal distribution, IV: The distribution of nonhomogeneous quadratic functions of normal variables, Annals of Mathematical Statistics, 33, 542-570.

Von Neumann, J. (1941): Distributions of the ratio of the mean square successive difference to the variance, Annals of Mathematical Statistics, 12, 367-395.

Von Neumann, J. (1942): A further remark concerning the distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance, Annals of Mathematical Statistics, 13, 86-88.